Snipper van Tom Koornwinder, 28 juni 2025: no. 9, Dag van de perfecte getallen

Vandaag is het niet alleen roze zaterdag en veteranendag, maar ook de dag van de perfecte getallen. Want de getallen 6 = 3 +2 +1 en 28 = 14 +7 + 4 + 2 +1 zijn allebei perfect, d.w.z. gelijk aan de som van hun echte delers. Ze zijn bovendien de twee kleinste getallen van dit type. De vroege Christenen verbonden dit met de 6 dagen waarin God de wereld had geschapen en de 28 dagen waarin de maan om de aarde draait. Om de twee volgende perfecte getallen te krijgen moet je al flink doortellen naar 496 en 8128. Maar bij deze tellerij kunnen we een heleboel getallen overslaan. Genoemde vier perfecte getallen hebben allemaal een heel speciale structuur:
$6 = 2\,(\,2^2 - 1\,)$, $28 = 2^2\,(\,2^3 - 1\,)$, $486 = 2^4\,(\,2^5 - 1\,)$, $8128 = 2^6\,(\,2^7 - 1\,)$.
Ha, zult u zeggen, de volgende drie perfecte getallen zijn
$2^8\,(\,2^9 - 1\,)$, $2^{10}\,(\,2^{11} - 1\,)$ en $2^{12}\,(\,2^{13} - 1\,)$.
Maar nee, alleen de laatste van die drie is een perfect getal. In het eerste getal hebben we $2^9 - 1$ als factor staan en 9 is geen priemgetal, dus $2^9 - 1$ is zeker geen priemgetal. In het tweede getal hebben we $2^{11} - 1$ als factor met 11 een priemgetal, en toch is $2^{11} - 1$ geen priemgetal. $2^{13} - 1$ is echter wel een priemgetal. Euclides bewees al dat elk getal van de vorm $2^{n-1}\,(\,2^n - 1\,)$ met $2^n - 1$ een priemgetal (en dus zeker n een priemgetal) perfect is. Euler bewees omgekeerd dat alle even perfecte getallen van deze vorm zijn. De bewijzen zijn niet moeilijk. Zijn we nu tevreden? Nog lang niet. Maar eerst een intermezzo.

Een getal is een *priemgetal* als het alleen door 1 en door zichzelf gedeeld kan worden. De priemgetallen zijn de bouwstenen van de positieve gehele getallen, net zoals de scheikundige elementen de bouwstenen van de moleculen zijn. Elk getal is namelijk uniek te schrijven als een product van machten van priemfactoren. Bijv. $72 = 2^3 \times 3^2$. Euclides bewees al met een bewijs uit het ongerijmde dat er oneindig veel priemgetallen zijn. Want stel dat er maar eindig veel priemgetallen zijn. Neem het product van al die priemgetallen en tel er 1 bij op. Dat getal is groter dan alle priemgetallen, dus geen priemgetal. Maar het kan geen van de priemgetallen als deler hebben. Dus het is wel een priemgetal. We hebben een tegenspraak, dus onze aanname moet onjuist zijn.

In 2003 schreef Hugo Brandt Corstius: “Ik was zeven jaar oud. Een jongen die bij ons in huis woonde legde mij uit wat priemgetallen waren. Toen gaf hij het bewijs van Euclides dat er oneindig veel van zijn. Ik was opgewonden, verrast, getroffen, ontroerd zoals later nooit meer. Dat je over reuzengetallen die heel ver weg lagen, kon redeneren, dat was verrukkelijk.” Vergelijk dit met wat Marcel Levi, voorziiter van NWO, afgelopen maandag in de NRC schreef. Hij verwijt (m.i. ten onrechte) de universiteiten dat ze niet genoeg aan het brede publiek duidelijk maken dat ze nuttig onderzoek doen. Mag je dan tegelijk ook niet communiceren hoe je je kunt verwonderen over wat je ontdekt en getroffen kunt worden door de schoonheid ervan?

Terug naar de perfecte getallen. We hebben gezien dat we alle even perfecte getallen kennen als we alle priemgetallen van de vorm $2^n - 1$ kennen, en dit zijn de Mersenne-priemgetallen. Tot op heden zijn er 52 zulke getallen bekend. Er wordt vermoed dat er oneindig veel van zijn, maar het is niet bewezen. Het grootst bekende Mersenne-priemgetal is $2^{136.279.841} - 1$, een getal van 41.024.320 cijfers en tevens het grootst bekende priemgetal. Kwalitatief kunnen we veel zeggen over priemgetallen, maar kwantitatief is is het een zaak van veel computerkracht en slimme algoritmen, en toch zullen we slechts getallen produceren die, gezien van uit de oneindigheid verwaarloosbaar klein zijn. En dat alles is voortgekomen uit dat de mensen ooit gingen tellen.